Földvári Viktória

A Bezdek–Pach-sejtésről

ELTE Eötvös József Collegium

Az általam vizsgált témakör központi kérdése a következő: legfeljebb hány eleme lehet egy *d* dimenziós konvex test egymást páronként érintő eltoltjaiból álló halmaznak? A Bezdek Károly és Pach János által megfogalmazott sejtés ennek egy olyan általánosabb változatára ad becslést, amelyben az eltolás mellett egy-egy középpontos nagyítást is megengedünk.

A téma szorosan összefügg több ismert és igen szemléletes diszkrét geometriai problémával. Ilyen például az, hogy hány pontot tudunk úgy elhelyezni egy *d* dimenziós normált térben, hogy közülük bármely kettő egymástól egységnyi távolságra essen; vagy az az Erdős Pál által 1948-ban megfogalmazott kérdés [1], hogy legfeljebb hány pontot tudunk úgy elhelyezni a *d* dimenziós euklideszi térben, hogy közülük bármely három által meghatározott szög legfeljebb derékszög legyen. A következő probléma megértéséhez vezessük be az antipodalitás fogalmát!

Definíció: Egy $X \subset \mathbb{R}^d$ halmaz antipodális, ha bármely két különböző $x, y \in X$ pontjához létezik két különböző, egymással párhuzamos H_x és H_y támaszhipersíkja X-nek, amikre $x \in H_x$ és $y \in H_y$ teljesül.
X szigorúan antipodális, ha $X \cap H_x = \{x\}$ és $X \cap H_y = \{y\}$ is teljesül.

A kapcsolódó kérdések közül a legjelentősebb az, hogy *d* dimenzióban legfeljebb hány eleme lehet egy antipodális ponthalmaznak. Az antipodális halmazokat és az általam vizsgált témát Ludwig Danzer és Branko Grünbaum hozták összefüggésbe egymással [2]. 1962-ben bizonyított tételükben rámutattak a fent említett problémák közötti kapcsolatokra, és ezeket használva egyszerre válaszoltak meg több, évek óta nyitott kérdést, köztük Erdős Pálét.

Tétel: $\mathbb{R}^d$-ben egy antipodális ponthalmaz számossága legfeljebb 2^d. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha az antipodális ponthalmaz egy *d* dimenziós parallelepipedon csúcshalmaza.

Tétel: $\mathbb{R}^d$-ben egy $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test egymást páronként érintő eltoltjaiból álló halmaz számossága legfeljebb 2^d. Egyenelőség pontosan akkor áll fenn, ha K egy *d* dimenziós parallelepipedon.

Hogyan változik ez a becslés, ha az eltolás mellett egy-egy középpontos nagyítást is megengedünk? Bezdek Károly és Pach János sejtése szerint a felső korlát ebben az esetben is 2^d. (Ezt Bezdek Károly később Robert Connelly-vel közös cikkében [3] publikálta.)

Sejtés: Ha $K \subset \mathbb{R}^d$ egy konvex test, $X := \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ és $\Lambda := \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$ úgy, hogy $\{\lambda_i K + x_i \ : \ i = 1, 2, ..., n\}$ a K test egymást páronként érintő pozitív homotetikusaiból álló halmaz, akkor $n \leq 2^d$.

[3]-ban szerepel az ilyen halmazok elemszámára adható, igen könnyen belátható 3^d felső becslés, és ha K a *d* dimenziós euklideszi gömb, akkor a maximális számosság pontosan *d* + 2. A Bezdek–Pach-sejtés azonban máig bizonyítatlan. A jelenleg ismert legjobb általános eredmény Naszódi Márton nevéhez fűződik, aki a következő, 2006-ban publikált [4] tételében javította a 3^d felső becslést. Bizonyításában egy meglepő projektív geometriai gondolattal antipodális halmazok számosságára vezette vissza a problémát.

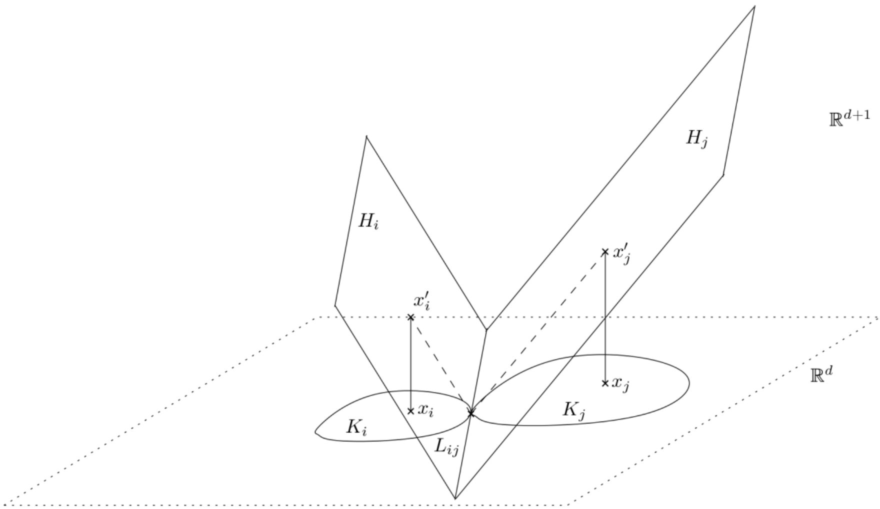
Tétel: Ha $K \subset \mathbb{R}^d$ egy konvex test, $X := \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ és $\Lambda := \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$ úgy, hogy $\{\lambda_i K + x_i \ : \ i = 1, 2, ..., n\}$ a K test egymást páronként érintő pozitív homotetikusaiból álló halmaz, akkor $n \leq 2^{d+1}$.

A bizonyításhoz szükségünk lesz a következő fogalomra:

Definíció: Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ egy konvex test, és tegyük fel, hogy $\mathbf{0} \in \mathrm{int}\ K$! Legyen $\lambda > 0$, továbbá $L \subset \mathbb{R}^d$ egy hipersík, és L^+ az egyik L által határolt zárt féltér! Ekkor az $L_\lambda := \left\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ x \in L^+, \ \lambda K + x \text{ érinti } L\text{-et}\right\}$ ponthalmaz az L hipersík L^+-ba való λK-eltoltjának nevezzük. Vegyük észre, hogy L_λ egy eltoltja L-nek!

A továbbiakban feltesszük, hogy K, X és Λ kielégítik a tétel feltételeit, továbbá, hogy $\mathbf{0} \in \mathrm{int}\ K$.

Lemma: Legyen $i, k \in \{1, 2, ..., n\}$ két index, és legyen L egy hipersík $\mathbb{R}^d$-ben, ami érinti a $\lambda_i K + x_i$ testet! Minden $\lambda > 0$-ra legyen L_λ az L-nek abba a zárt féltérbe való λK-eltoltja, amelyik tartalmazza $\lambda_i K + x_i$-t! Ekkor x_k az L_{λ_k} által határolt x_i-t tartalmazó zárt féltérben van.



A bizonyítás ötlete a következő: X-ből és Λ-ból konstruálunk egy n számosságú X'' halmazt $\mathbb{R}^{d+1}$-ben, és megmutatjuk, hogy X'' antipodális. Azonosítsuk $\mathbb{R}^d$-t a $\{v = (v^1, v^2, ..., v^{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid v^{d+1} = 0\}$ $\mathbb{R}^{d+1}$-beli hipersíkkal, és készítsük el az $X' := \{x'_i := (x_i, \lambda_i) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid i = 1, 2, ..., n\}$ halmazt! Legyen $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ két különböző index, és L_{ij} egy $(d-1)$-dimenziós affin altere $\mathbb{R}^d$-nek, ami elválasztja $\lambda_i K + x_i$ és $\lambda_j K + x_j$-t! Definiáljuk a H_i és H_j $\mathbb{R}^{d+1}$-beli hipersíkokat a következőképpen: $H_i := \operatorname{aff}(L \cup x'_i)$ és $H_j := \operatorname{aff}(L \cup x'_j)$!
Most legyen H_i^+ az a H_i által határolt zárt féltér $\mathbb{R}^{d+1}$-ben, amelyik tartalmazza x_j-t, és hasonlóan H_j^+ az x_i-t tartalmazó H_j által határolt zárt féltér $\mathbb{R}^{d+1}$-ben! Ekkor $H_i \cap \mathbb{R}^d = H_j \cap \mathbb{R}^d = H_i \cap H_j = L$.
Legyen $C_{ij} := H_i^+ \cap H_j^+$! A lemma alapján egyszerűen meggondolható, hogy $X' \subset C_{ij}$.
Ezzel bebizonyítottuk, hogy minden $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $i \neq j$ indexpárra létezik egy $C_{ij} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ ék, ami tartalmazza X'-t. C_{ij}-t két $\mathbb{R}^{d+1}$-beli hipersík határolja, ami pontosan az L_{ij} $(d-1)$-dimenziós affin altérben metszik egymást és $\mathbb{R}^d$-t. Most projektivizáljuk $\mathbb{R}^{d+1}$-et ideális elemek felvételével! Tekintsünk egy olyan

projektív transzformációt, ami $\mathbb{R}^d$-t az ideális hipersíkba képezi! Ez a transzformáció X'-t egy X'' n-elemű halmazba viszi. Ekkor a H_i, H_j hipersíkok az X'' egymással párhuzamos támaszhipersíkjaiba képződnek, tehát X'' antipodális. Danzer és Grünbaum tétele szerint egy $\mathbb{R}^{d+1}$-beli antipodális hamaz elemszáma legfeljebb 2^{d+1}. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Abban a speciális esetben, amikor a K konvex test középpontosan szimmetrikus, erősebb becslés is igazolható. Naszódi Márton és Lángi Zsolt 2009-ben [5] a következőt bizonyították: Egy origóra szimmetrikus $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex test egymást páronként érintő pozitív homotetikusaiból álló halmaz elemszáma szigorúan kisebb, mint $3 \cdot 2^{d-1}$.

A továbbiakban arra az esetre szorítkozunk, amikor a testek $\mathbb{R}^2$-ben helyezkednek el. Jelenlegi ismereteink szerint egy síkbeli K konvex test egymást páronként érintő pozitív homotetikusaiból álló halmaz elemszáma legfeljebb 8. Abban a speciális esetben, ha K középpontosan szimmetrikus, ez a becslés 6-ra javítható. Kutatásom eredménye, hogy a 8-as felső korlátra adott bizonyítás továbbgondolható, s így az általános esetben az elemszám felülről becsülhető 5-tel.

Tétel: Ha $K \subset \mathbb{R}^2$ egy konvex test, $X := \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}^2$ és $\Lambda := \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$ úgy, hogy $\mathcal{K} := \{\lambda_i K + x_i \ : \ i = 1, 2, ..., n\}$ a K test egymást páronként érintő pozitív homotetikusaiból álló halmaz, akkor $n \leq 5$.

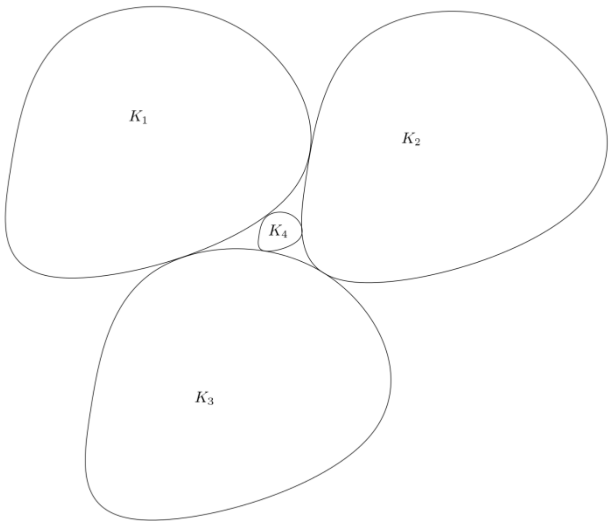
A bizonyítás részletesen megtalálható BSc szakdolgozatomban [6], a következőkben csupán vázolom.

A becslés javítása Naszódi Márton tételének bizonyításán alapszik. Ha minden i-re a H_i sík pontosan egy X'-beli pontot tartalmaz, akkor az $\mathbb{R}^2$-et az ideális síkba képező projektív transzformáció általi képére is pontosan egy X''-beli pont illeszkedik. A H_i, H_j síkok az X'' egymással párhuzamos támszsíkjaiba képződtek, tehát ekkor X'' szigorúan antipodális halmaz. Branko Grünbaum [7]-ben bebizonyította, hogy $\mathbb{R}^3$-ben egy szigorúan antipodális halmaz elemszáma legfeljebb 5, tehát ebben az esetben $n \leq 5$.

Megmutattam, hogyha az előbbi feltétel nem teljesül, akkor $n \leq 4$, vagyis a Bezdek–Pach-sejtés éles. A bizonyítást két esetre bontottam aszerint, hogy $\mathcal{K}$ elemei közül van-e három olyan, amelyek közös ponttal rendelkeznek. Amennyiben van, felhasználva, hogy az X'' halmaz nem szigorúan antipodális, meggondolható, hogy létezik egy olyan egyenes, amelyet két $\mathcal{K}$-beli test az egyik oldalról, egy harmadik pedig a másik oldalról érint. Ezt a speciális elhelyezkedést és a pozitív homotetikusságot kihasználva esetszétválasztással igazoltam, hogy e három $\mathcal{K}$-beli testhez már csak egyetlen őket érintő $\mathcal{K}$-beli test létezhet, vagyis ekkor $n \leq 4$.

Ha nincs három közös ponttal rendelkező $\mathcal{K}$-beli test, akkor a pozitív homotetikusságnál sokkal gyengébb feltételek is elégségesek a 4-es felső korlát igazolásához. Figyeljük meg, hogy a következő tételhez az sem szükséges, hogy X'' ne legyen szigorúan antipodális!

Tétel: Három $\mathbb{R}^2$-beli, közös ponttal nem rendelkező, egymást páronként érintő konvex test két diszjunkt tartományra bontja $\mathbb{R}^2$-nek a testeken kívüli részét. Nevezzük belsőnek e két tartomány közül a korlátosat! Ekkor ha $K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4 \subset \mathbb{R}^2$ olyan egymást páronként érintő konvex testek, melyek közül semelyik háromnak nincs közös pontja, akkor egyikük a másik három által meghatározott belső tartományban fekszik (az ábrán látható módon).



Ebből már következik, hogy $n \leq 4$. Tegyük fel indirekten, hogy $n \geq 5$, azaz léteznek $K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ K_5 \subset \mathcal{K}$ testek. K_5 érinti K_4-et, ezért az előző tétel miatt (az ábra jelöléseit használva) K_5-nek is a K_1, K_2 és K_3 testek által körülzárt síkrészben kell lennie. Ezt a tartományt K_4 három részre osztja, ezért K_5 része a K_4 és a K_1, K_2, K_3 közül valamelyik két test – feltehető, hogy K_1 és K_2 - által körülzárt tartománynak is. Ekkor azonban K_5 nem érintheti K_3-at, ami ellentmondás. Ezzel befejeztük a bizonyítás vázolását.

Egy *d* dimenziós konvex test egymást páronként érintő pozitív homotetikusaiból álló halmaz elemszámára adott ma ismert legjobb általános becslés tehát 2^{d+1}, középpontosan szimmetrikus test esetén $3 \cdot 2^{d-1}$, $d = 2$-re pedig 5. A Bezdek–Pach-sejtés máig bizonyítatlan, s így egy igen érdekes kutatási lehetőség.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] Erdős P.; *American Mathematical Monthly* **55**, 431., 1948
[2] Danzer L., Grünbaum B.; *Mathematische Zeitschrift* **79**, 95–99., 1962
[3] Bezdek K., Connelly R.; *Annales Universitatis Scientarium Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae Sectio Mathematicae* **31**, 115–127., 1988
[4] Naszódi M.; *Periodica Mathematica Hungarica* **53**, 227–230., 2006
[5] Lángi Zs., Naszódi M.; *Canadian Mathematical Bulletin* **52**, 407–415., 2009
[6] Földvári V.: A Petty-tételkör; ELTE matematika BSc szakdolgozat, *http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_mat/2014/foldvari_viktoria_andrea.pdf* , 2014
[7] Grünbaum B; *Israel Journal of Mathetmatics* **1**, 5–10., 1963